48. Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente criterio di monotonia, fondamentale per studiare il grafico di una funzione. Ricordiamo che la definizione di funzione monotòna (ad esempio crescente) è stata data nel paragrafo 7.

CRITERIO DI MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Allora.*

(48.1) $$f'(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è crescente in } [a, b];$$

(48.2) $$f'(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è decrescente in } [a, b].$$

Dimostrazione: proviamo la (48.1); la (48.2) si ottiene in modo analogo.

Nell'implicazione $\Rightarrow$, supponendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, occorre dimostrare che, se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Scriviamo la tesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ per cui

(48.3) $$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1);$$

dato che $f'(x_0) \geq 0$ e dato che $x_2 > x_1$, risulta anche $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Viceversa, se la funzione f è crescente in [a, b], per ogni $x \in (a, b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geq f(x)$ e quindi

(48.4) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

(il lettore noti che la (48.4) vale anche per $h < 0$); al limite per $h \to 0^+$ si trova la tesi $f'(x) \geq 0$.

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del criterio precedente. La funzione e^x è (strettamente) crescente su tutto **R**, perché la derivata $D\, e^x = e^x$ è positiva. La funzione log x è crescente per $x > 0$, perché la sua derivata $D \log x = 1/x$ è positiva. Così pure la funzione arctg x è crescente su tutto **R**, perché $D(\operatorname{arctg} x) = 1/(1 + x^2) > 0$.

La funzione x^2 ha derivata uguale a 2x, che è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$; quindi la funzione x^2 è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$; $x = 0$ è perciò un punto di minimo.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ ha come derivata $f' = 3(x^2 - 1)$, che si annulla per $x = \pm 1$, è positiva all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$, ed è negativa all'interno. Quindi la funzione f è crescente per $x > 1$ e $x < -1$, ed è decrescente per $-1 < x < 1$. Il punto $x = -1$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = 1$ è di minimo. Queste sole considerazioni, unitamente ad alcuni valori della funzione (per $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{3}$) facilmente calcolabili, permettono di disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$ come in figura 6.4.

In generale, si tenga conto che il segno della derivata prima costituisce una delle principali informazioni per disegnare il grafico di una funzione.

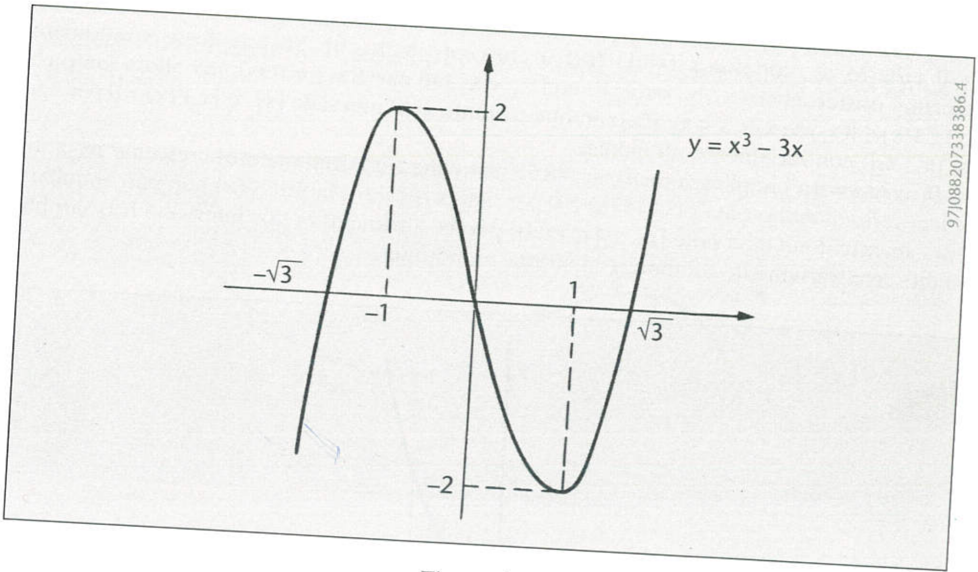

Figura 6.4

Conseguenza del criterio di monotonia è la

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO. — *Una funzione è costante in un intervallo* [a, b] *se e solo se è derivabile in* [a, b] *e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione: come in (40.3) si prova che la derivata di una funzione costante in [a, b] è nulla per ogni $x \in [a, b]$.

Viceversa, se $f(x)$ è derivabile in [a, b] e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per i criteri di monotonia (48.1), (48.2), $f(x)$ è contemporaneamente crescente e decrescente in [a, b]; perciò, per ogni $x \in (a, b]$ (essendo $x > a$) risulta allo stesso tempo $f(x) \geq f(a)$ e $f(x) \leq f(a)$; cioè $f(x)$ è identicamente uguale ad $f(a)$.

Combinando il criterio di monotonia e il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo si giunge facilmente al seguente:

CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Allora*

(48.5) $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in (a, b)$; f' *non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in* (a,b) $\iff$ f *è strettamente crescente in* [a, b];

(48.6) $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in (a, b)$; f' *non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in* (a,b) $\iff$ f *è strettamente decrescente in* [a, b].

Dimostrazione: proviamo l'implicazione $\Rightarrow$ in (48.5); essendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, per il criterio di monotonia (48.1) $f(x)$ è crescente in $[a, b]$. Se non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$; ma allora, dato che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, contrariamente all'ipotesi.

Proviamo ora l'implicazione $\Leftarrow$ in (48.5); dato che f è (strettamente) crescente in $[a, b]$, per il criterio di monotonia (48.1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi identicamente in un intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ perché altrimenti in tale intervallo $f(x)$ sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi di stretta monotonia.

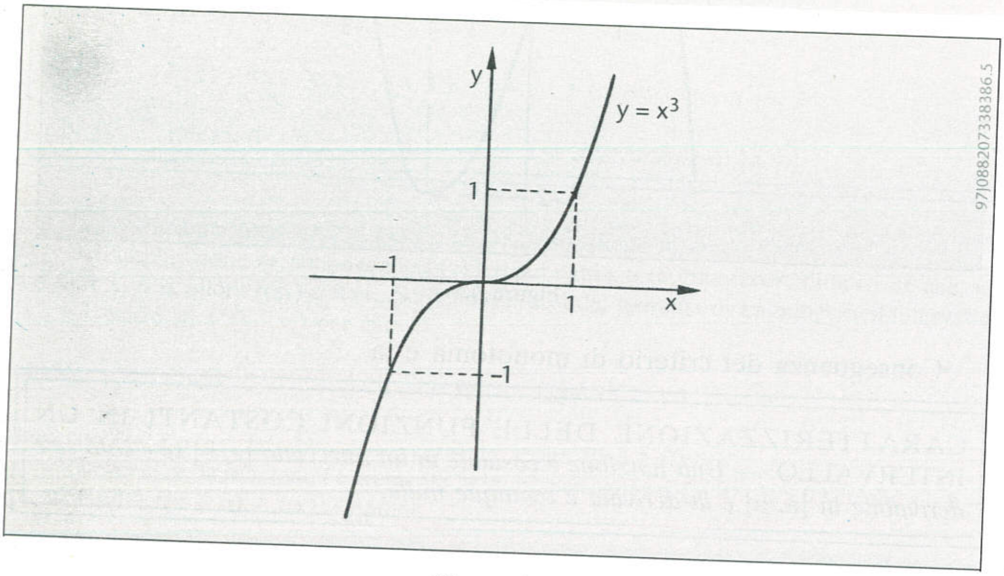

Figura 6.5

Osserviamo che una funzione strettamente crescente e derivabile in un intervallo può avere derivata nulla in *qualche* punto (il criterio (48.5) esclude che la derivata si annulli *identicamente* in un intervallo). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, rappresentata in figura 6.5, è strettamente crescente su $\mathbf{R}$, perché:

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1^3 < x_2^3 \iff x_1 < x_2\ ; \tag{48.7}$$

la derivata $f'(x) = 3x^2$ è positiva su $\mathbf{R} - \{0\}$, ma si annulla per $x = 0$.

49. Funzioni convesse e concave

Introduciamo una nuova definizione utile per studiare il grafico di una funzione.

Si dice che una funzione è *convessa* in un intervallo $[a, b]$, se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è *al di sopra* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Analogamente si dice che una funzione è *concava* in [a, b] se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione è, nell'intervallo [a, b], *al di sotto* della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$.

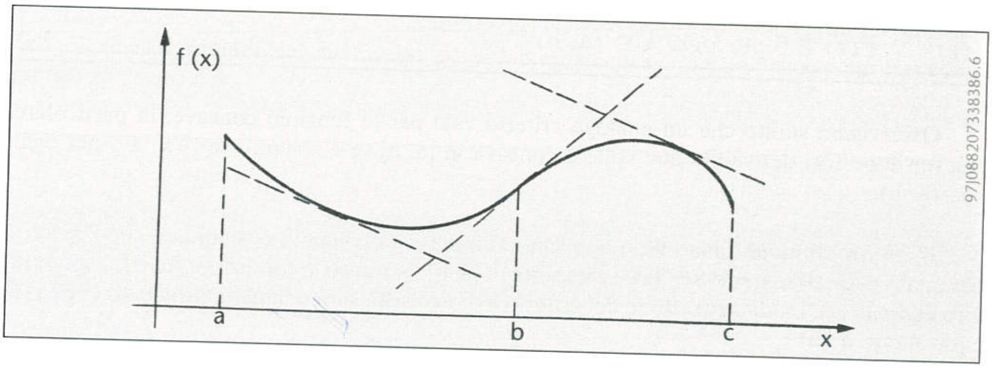

Figura 6.6

Ad esempio, nella figura 6.6 la funzione f(x) è convessa in [a, b], ed è concava in [b, c]. Il punto b è un punto di *flesso*, cioè un punto in cui cambia la concavità.

Possiamo ripetere le definizioni in modo più preciso utilizzando l'espressione analitica dell'equazione della retta tangente. Supponiamo che f sia una funzione derivabile nell'intervallo [a, b]; diamo le seguenti definizioni:

$$\text{(49.1)} \qquad f \text{ \textit{convessa in} } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \\ \forall\, x, x_0 \in [a, b]; \end{cases}$$

$$\text{(49.2)} \qquad f \text{ \textit{concava in} } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \\ \forall\, x, x_0 \in [a, b]. \end{cases}$$

Se, come in figura 6.6, una funzione f(x) è convessa in [a, b] e concava in [b, c] $(a < b < c)$, si dice che il punto b è di *flesso* per la funzione f(x). Naturalmente b è di flesso anche se la funzione f(x) è concava in [a, b] e convessa in [b, c].

CRITERIO DI CONVESSITÀ. — *Supponiamo che* f(x) *sia una funzione derivabile in* [a, b] *e che ammetta derivata seconda in* (a, b); *le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti*

(a) $f(x)$ *è convessa in* $[a, b]$;

(b) $f'(x)$ *è crescente in* $[a, b]$;

(c) $f''(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$.

Osserviamo subito che un analogo criterio vale per le funzioni concave; in particolare una funzione $f(x)$ derivabile due volte è concava in $[a, b]$ se e soltanto se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Il criterio di monotonia (48.1) applicato alla derivata prima $f'(x)$ stabilisce che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ se e solo se $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$; pertanto le condizioni (b) e (c) sono fra loro equivalenti. La dimostrazione del criterio di convessità sarà completa provando che (a) è equivalente a (b).

Dimostrazione che (a) $\Rightarrow$ (b): allo scopo di provare che $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$, consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$; ponendo consecutivamente x_0 uguale a x_1, oppure a x_2, nella definizione di convessità (49.1), si ha

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \qquad \forall\, x \in [a, b]; \tag{49.3}$$

$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{49.4}$$

In (49.3), (49.4) x è un punto generico di $[a, b]$; scegliendo $x = x_2$ in (49.3) e $x = x_1$ in (49.4), sommando membro a membro e semplificando si ottiene

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \tag{49.5}$$

cioè

$$[f'(x_2) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) \geq 0. \tag{49.6}$$

Essendo $x_2 > x_1$ ne segue che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

Dimostrazione che (b) $\Rightarrow$ (a): fissati $x, x_0 \in [a, b]$, con $x \neq x_0$, per il teorema di Lagrange esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0, x, per cui

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1) \cdot (x - x_0). \tag{49.7}$$

Distinguiamo i casi $x > x_0$ e $x < x_0$. Se $x > x_0$, essendo $x_1 \in (x_0, x)$ (cioè, in particolare, $x_1 > x_0$), per la monotonia di $f'(x)$ risulta $f'(x_1) \geq f'(x_0)$, che, insieme alla (49.7), dà luogo alla conclusione:

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{49.8}$$

Se $x < x_0$ si procede in modo analogo, osservando che $x_1 \in (x, x_0)$ è minore di x_0 e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$; anche in questo caso si ottiene la conclusione (49.8) perché, di nuovo, $f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, dato che $(x - x_0) < 0$.

Riprendiamo gli esempi introdotti nel paragrafo precedente. La funzione e^x è convessa su tutto **R**, dato che la sua derivata seconda $(= e^x)$ è positiva. La funzione log x è concava per $x > 0$, perché la sua derivata seconda $(= -1/x^2)$ è negativa. Il lettore può verificare che la funzione arctg x è convessa per $x < 0$, ed è concava per $x > 0$; il punto $x = 0$ è di flesso per la funzione arctg x. La funzione x^2 è convessa su tutto **R**.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$, considerata in precedenza, ha come derivate successive: $f' = 3x^2 - 3$, $f'' = 6x$. Quindi f(x) è convessa per $x > 0$ ed è concava per $x < 0$. Si confronti con il grafico in figura 6.4.

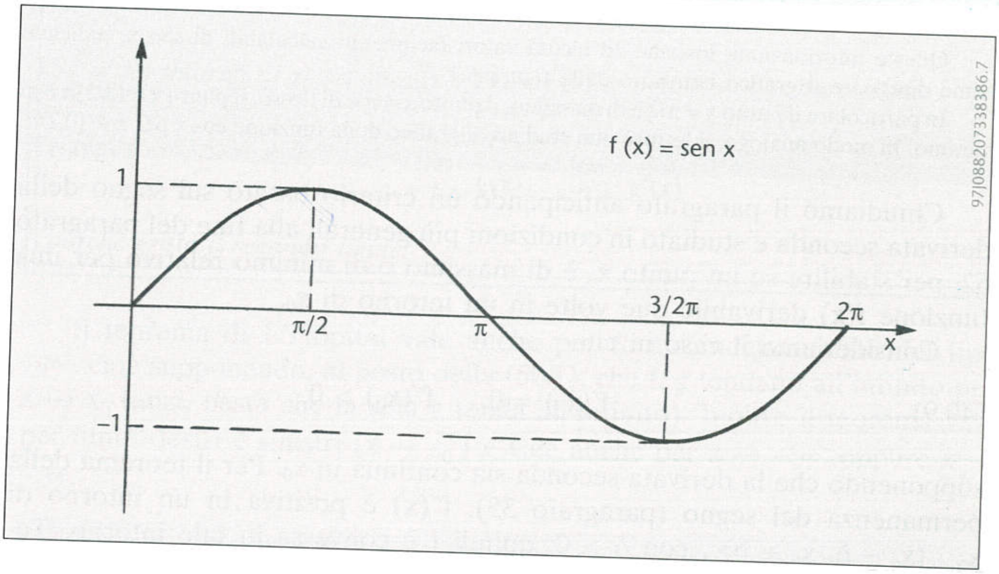

Figura 6.7

Le proprietà stabilite in questi ultimi due paragrafi ci consentono di motivare il grafico delle funzioni trigonometriche sen x, cos x. Consideriamo ad esempio la funzione f(x) = sen x, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$. Calcoliamo il segno delle derivate $f' = \cos x$, $f'' = -\operatorname{sen} x$:

x f(x) = sen x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
segno di f	+	+	–	–
segno di f′	+	–	–	+
segno di f″	–	–	+	+

In corrispondenza abbiamo le informazioni di monotonia e di concavità per f:

$f(x) = \text{sen } x$ \ x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
segno di f	positivo		negativo	
monotonia di f	crescente	decrescente		crescente
concavità di f	concava		convessa	

Queste informazioni, insieme ad alcuni valori facilmente calcolabili di sen x, indicano come disegnare il grafico ben noto della figura 6.7.

In particolare il punto $x = \pi/2$ è di massimo, il punto $x = \pi$ è di flesso, il punto $x = (3/2)\pi$ è di minimo. In modo analogo, il lettore può studiare il grafico della funzione cos x per $x \in [0,2\pi]$.

Chiudiamo il paragrafo anticipando un criterio basato sul segno della derivata seconda e studiato in condizioni più generali alla fine del paragrafo 52, per stabilire se un punto x_0 è di massimo o di minimo relativo per una funzione $f(x)$ derivabile due volte in un intorno di x_0.

Consideriamo il caso in cui

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) > 0, \tag{49.9}$$

supponendo che la derivata seconda sia continua in x_0. Per il teorema della permanenza del segno (paragrafo 35), $f''(x)$ è positiva in un intorno di x_0 ; $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$; quindi f è convessa in tale intorno. Tenendo presente che $f'(x_0) = 0$, risulta

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0), \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \tag{49.10}$$

perciò x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Il caso $f''(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente criterio, valido per una funzione che ammette derivata seconda (continua):

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \textit{ punto di minimo relativo}; \tag{49.11}$$

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \textit{ punto di massimo relativo}. \tag{49.12}$$

50. Il teorema di L'Hôpital

Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni che tendono a zero per $x \to x_0$. Abbiamo già visto nel paragrafo 20 che il rapporto $f(x)/g(x)$ è una forma indeterminata per $x \to x_0$. Cioè, in genere non è possibile dedurre immediatamente il risultato del limite del rapporto ma occorre preliminarmente trasformare il rapporto in modo da togliere l'indeterminazione. Il teorema di L'Hôpital serve a questo scopo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. — *Siano* f, g *funzioni derivabili in un intorno di* x_0 *(con la eventuale eccezione di* x_0*) tali che*

(50.1)
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 *risulta* $g(x), g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \neq x_0$, *allora si ha*

(50.2)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

purché esista il secondo limite.

Il teorema di L'Hôpital vale anche per forme indeterminate del tipo ∞/∞, cioè supponendo, al posto della (50.1), che f, g tendano all'infinito per $x \to x_0$ (anzi, basta che la sola g tenda all'infinito). Inoltre il teorema vale per limiti destri e sinistri ($x \to x_0^{\pm}$) e vale anche per $x \to +\infty$, oppure $x \to -\infty$.

La dimostrazione del teorema di L'Hôpital nel caso generale è proposta nel paragrafo 53 in appendice; in questa sede ci limitiamo a provare il teorema nel caso particolare, ma significativo, in cui f, g sono derivabili in x_0, con derivata continua, e $g'(x_0) \neq 0$.

In tal caso, dato che f, g sono derivabili in x_0, esse sono anche continue in x_0 e quindi, per la (50.1), risulta $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si ottiene

(50.3)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Consideriamo alcuni esempi. Calcoliamo il limite

(50.4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen } 2x}.$$

Si tratta di una forma indeterminata 0/0, che verifica le ipotesi del teorema di L'Hôpital (ed anzi verifica le ipotesi che abbiamo assunto nel fare la dimostrazione). Si ha quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen } 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}. \tag{50.5}$$

Un'altra situazione in cui sono verificate le ipotesi assunte nella dimostrazione è la seguente

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1/x} = 2. \tag{50.6}$$

Consideriamo ora due limiti notevoli, analoghi ai limiti di successione (26.3), e che si calcolano facilmente per mezzo del teorema di L'Hôpital. Indichiamo con b un parametro positivo; per calcolare il limite (50.8) deriviamo successivamente n volte il numeratore x^b, fino ad ottenere una potenza x^{b-n} con esponente $b - n$ negativo o nullo (cioè poniamo $n = b$, se b è intero, $n = [b] + 1$ altrimenti):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{bx^{b-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{bx^b} = 0; \tag{50.7}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b\, x^{b-1}}{e^x} = \ldots \\ &\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)\, x^{b-n}}{e^x} = 0. \end{aligned} \tag{50.8}$$

Il teorema di L'Hôpital è utile anche per il calcolo del limite di una differenza $f(x) - g(x)$ che si presenta sotto la forma indeterminata $\infty - \infty$, oppure per il calcolo del limite di un prodotto che si presenta sotto la forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Per il prodotto si pone $fg = f/(1/g)$, oppure $fg = g/(1/f)$, per ricondursi rispettivamente ad una forma 0/0 oppure ∞/∞. Ad esempio, se b è un parametro positivo, si ha:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} x^b \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-b}} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-b\, x^{-b-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^b}{-b} = 0. \end{aligned} \tag{50.9}$$

Per mezzo del teorema di L'Hôpital si calcolano anche alcuni limiti che si presentano sotto le forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0, come negli esempi seguenti:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\log x^x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} = \\ &= e^{\lim_{x \to 0^+} x \log x} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1/x}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1. \end{aligned} \tag{50.10}$$

(50.11)
$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen} x)}=$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}} = e^1 = e.$$

51. Studio del grafico di una funzione

I risultati ottenuti in questo capitolo ci permettono di studiare l'andamento di una funzione f(x) e di disegnarne il grafico. Si può procedere secondo lo schema seguente:

A. — Si determina il *dominio* (o *insieme di definizione*) della funzione f(x).

B. — Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria; ad esempio se f è una funzione *pari*: $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x$, oppure *dispari*: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$, oppure *periodica* di periodo T: $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Quando è semplice farlo, si calcolano le intersezioni con gli assi ed il segno della funzione.

C. — Si determinano gli eventuali asintoti orizzontali o verticali. Ricordiamo che gli *asintoti orizzontali* si trovano calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$, se tali limiti esistono e sono finiti. Cioè:

(51.1)
$$y = \ell \quad \textit{asintoto orizzontale} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}.$$

Nel caso della definizione (51.1), si parla di asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; si può avere in modo analogo un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Gli *asintoti verticali* si trovano calcolando il limite per $x \to x_0$ (eventualmente $x \to x_0^+$, oppure $x \to x_0^-$) quando il risultato del limite è infinito:

(51.2)
$$x = x_0 \quad \textit{asintoto verticale} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

D. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è crescente o decrescente*, ed *i punti di massimo o minimo relativo*, studiando il segno della derivata prima.

Si calcolano i valori di f nei punti di massimo o minimo relativo.

E. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è convessa o concava*, e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno della derivata seconda.

Si calcolano i valori di f nei punti di flesso.

F. — Si determinano gli eventuali asintoti obliqui. Un *asintoto obliquo* per $x \to +\infty$ è una retta di equazione $y = mx + q$ con la proprietà:

$$(51.3) \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Ciò significa che, per $x \to +\infty$, il grafico della funzione è vicino al grafico della retta $y = mx + q$.

Supponiamo che esista un asintoto obliquo, cioè supponiamo che valga la relazione (51.3), e ricaviamo i valori di m, q. Se $f(x) - mx - q$ tende a zero per $x \to +\infty$, a maggiore ragione dividendo l'espressione per x otteniamo una quantità che tende a zero. Quindi

$$(51.4) \qquad 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m.$$

Il valore di q si ricava direttamente dalla (51.3). Riassumendo, i valori di m, q sono dati da:

$$(51.5) \qquad m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,; \qquad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

Naturalmente considerazioni analoghe valgono per $x \to -\infty$. Notiamo anche che, se esiste un asintoto orizzontale $y = \ell$ per $x \to +\infty$, allora è inutile ricercare un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Infatti, se $f(x) \to \ell$ per $x \to +\infty$, allora $f(x)/x \to 0$, e quindi $m = 0$, $q = \ell$. Cioè si ritrova l'asintoto di equazione $y = \ell$.

Secondo lo schema proposto, studiamo la seguente funzione:

$$(51.6) \qquad f(x) = x\, e^{1/x}.$$

A. — La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Quindi il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

B. — La funzione non è definita per $x = 0$ e non si annulla per alcun valore di $x \in \mathbf{R} - \{0\}$; perciò il grafico di $f(x)$ non interseca gli assi cartesiani; $f(x)$ risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ (dato che il fattore $e^{1/x}$ è positivo per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$).

C. — Per determinare gli asintoti orizzontali e verticali si calcolano i limiti agli estremi del dominio. Nel nostro caso si calcolano i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$. Per $x \to \pm\infty$, $e^{1/x} \to e^0 = 1$; quindi

$$(51.7) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\, e^{1/x} = \pm\infty;$$

perciò non ci sono asintoti orizzontali. Per $x \to 0^-$ abbiamo un altro limite immediato; infatti in tal caso $1/x \to -\infty$, e quindi $e^{1/x} \to 0$. Ne segue

$$\lim_{x \to 0^-} x\, e^{1/x} = 0; \tag{51.8}$$

ciò significa che per $x \to 0^-$ non c'è un asintoto verticale. Per calcolare il limite per $x \to 0^+$ usiamo il teorema di L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty; \end{aligned} \tag{51.9}$$

quindi la retta verticale di equazione $x = 0$ è un asintoto per $x \to 0^+$.

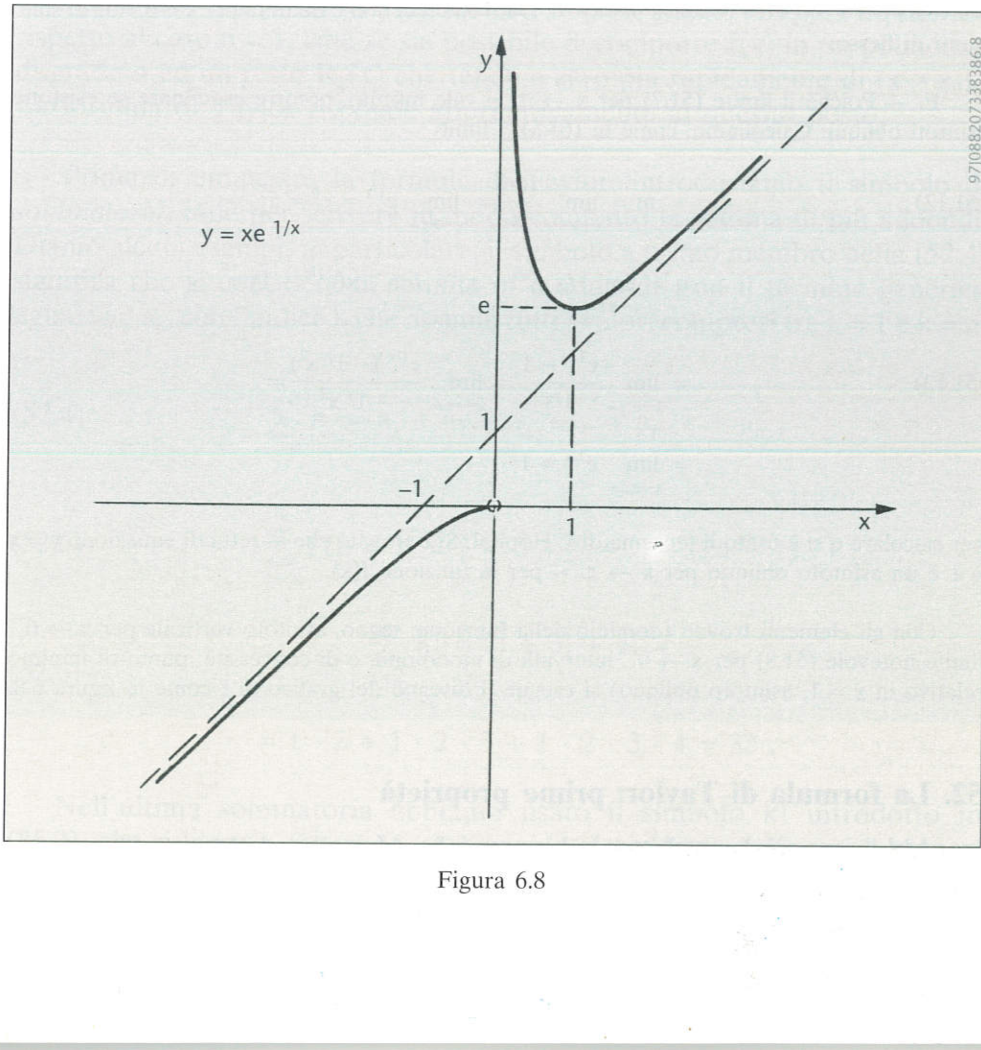

Figura 6.8

D. — La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{1/x} + x\, e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right). \tag{51.10}$$

Per ogni x risulta $e^{1/x} > 0$. Quindi la derivata prima è positiva se $(1 - 1/x) > 0$, cioè se $x > 1$ oppure $x < 0$. La derivata prima è negativa se $0 < x < 1$. Ne segue che la funzione è crescente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, ed è decrescente nell'intervallo $(0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo relativo; in corrispondenza la funzione assume il valore $f(1) = e$.

E. — La derivata seconda vale

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2} = \\ &= e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(-1 + \frac{1}{x} + 1\right) = e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^3}. \end{aligned} \tag{51.11}$$

La derivata seconda è positiva per $x > 0$, ed è negativa per $x < 0$. Quindi la funzione è convessa per $x > 0$, ed è concava per $x < 0$. Dato che $f(x)$ non è definita per $x = 0$, non ci sono punti di flesso.

F. — Poiché il limite (51.7) per $x \to \pm\infty$ vale infinito, occorre esaminare se esistono asintoti obliqui. Calcoliamo, come in (65.5), i limiti

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1; \tag{51.12}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty}(x\, e^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1; \end{aligned} \tag{51.13}$$

per calcolare q si è usato il teorema di L'Hôpital. Si è trovato che la retta di equazione $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ per la funzione $f(x)$.

Con gli elementi trovati (dominio della funzione, segno, asintoto verticale per $x \to 0^+$, limite notevole (51.8) per $x \to 0^-$, intervalli di monotonia e di convessità, punto di minimo relativo in $x = 1$, asintoto obliquo) si esegue il disegno del grafico di f come in figura 6.8.

52. La formula di Taylor: prime proprietà

Abbiamo già introdotto nel paragrafo 44 un metodo per "approssimare" una funzione derivabile con un polinomio di primo grado. Abbiamo